# 关联矩阵与树的关系

马蓓蓓，王万禹

（成都师范学院 数学学院，成都 611130）*

**摘 要：** 根据图 $G$ 的关联矩阵的部分性质，得出了关联矩阵与树之间的关系，即 $G$ 的树的总数 $=|AA^T|$，其中 $A$ 为图 $G$ 的关联矩阵。另一方面，根据大子阵的边集合是 $G$ 的一棵生成树当且仅当 $A$ 的大子阵非退化，给出了一种快速找出任意图 $G$ 中生成树的个数的求法。

**关键词：** 关联矩阵；大子阵；树

**doi：** 10.3969/j.issn.2095－5642.2018.11.092

**中图分类号：** O157.5 **文献标志码：** A **文章编号：** 2095-5642(2018)11-0092-05

## 1 引言

当前，图论中关联矩阵的应用研究较少，更多的是利用关联矩阵来表示一个图形以及研究关联矩阵自身所具有的一些性质。徐俊明在文献[4]中给出了关联矩阵和行列式问题，但并没有就关联矩阵和邻接矩阵之间的关系进行联系。在文献[5]中，作者利用关联矩阵的谱理论对欧拉图进行了研究，并指出关联矩阵的主对角线谱第一行均为偶数，则图为欧拉图，若对角线谱第一行中奇数个数是大于 2 的偶数，则图不是欧拉图。本文中，我们建立起了图 $G$ 的关联矩阵和树的关系，使得我们可以利用关联矩阵，快速计算出一个图的树的个数，加快了寻找一个图的树的个数的运算速度，并且给出了关联矩阵的大子阵非退化，则该大子阵的边集是 $G$ 的生成树。

## 2 若干基本定义和引理

本文中，我们考虑的图 $G$ 都是无向图，有限和简单图。接下来我们给出本文中所需要的一些基本定义，未给出的图的定义参看文献[1]。

定义 1：设 $G$ 是一个 $(n,m)$ 图，令 $a_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若边与顶点 } i \text{ 关联}, \\ 0, & \text{否则},\end{cases}$ 则称元素 $a_{ij}(i=1,2,L,n,j=1,2,L,m)$ 构成的 $n\times m$ 矩阵为图 $G$ 的完全关联矩阵，记做 $A_e$。

定义 2：从连通图 $G$ 的完全关联矩阵 $A_e$ 中删除任意一行所得到的矩阵称为连通图的关联矩阵，而删去这一行所对应的顶点称为参考点。

定义 3：设图 $G$ 的顶点及连通分支的个数分别是 $n,\rho$，则 $G$ 的秩为 $r(g)=n-\rho$，特别的当 $\rho=1$ 时，即是说当图 $G$ 为连通图时，$r(G)=n-1$。

定义 4：对于一个 $n\times m$ 阶矩阵，如果一个方子阵的阶等于 $n$ 和 $m$ 的最小值，则称此子阵为大子阵，大

* **收稿日期：** 2018-03-05

**基金项目：** 四川省教育厅自然科学基金“图的彩虹连通数在网络安全领域的研究及其应用”(17ZB0435)

**作者简介：** 马蓓蓓(1984—)，女，四川成都人，讲师，硕士，研究方向：图论及其应用；
王万禹(1986—)，男，四川成都人，讲师，硕士，研究方向：图论及其应用。

子阵的行列式称为大子式。

定义 5:本文矩阵所采用的运算都是用模 2 代数,模 2 代数运算规则是:

$$\begin{cases}0+0=0\\0+1=1\\1+0=0\\1+1=0\end{cases}\text{(模 2 加)}\qquad\begin{cases}0\cdot 0=0\\0\cdot 1=0\\1\cdot 0=0\\1\cdot 1=1\end{cases}\text{(模 2 乘)}$$

接下来,我们给出两个引理,它们将在第二部分定理的证明过程中起到重要作用。

引理 1:$G$ 为连通的$(n,m)$图,那么 $G$ 的完全关联矩阵的秩为 $n-1$。

证:由于一条边有两个顶点,所以在 $A_e$ 的中各列中,每列总存在两个 1,这就是说,将其中的 $m-1$ 列以 2 为模加到剩余的一项后,这项变全成了 0,也就说这一项可以由其余 $n-1$ 行表示。由线性代数知,$A_e$ 的秩应小于 $A_e$ 的行数,而 $A_e$ 的行数等于图的顶点数 $n$,也就是说 $R(A_e)\leq n-1$。

假设 $A_e$ 的秩小于 $n-1$,则 $A_e$ 的 $n-1$ 行是线性相关的,也就是说在这 $n-1$ 行中将任意的 $n-2$ 行加到剩余的一行中,这行就全成了 0,但是这是不可能的,因为在一个连通图中,$A_e$ 的每一行至少含有一个 1,同时每一列总有两个 1,考虑任意一行的 $i$ 个 1 位于第 $j$ 列,那一定还有一个 1 在 $j$ 列的另外一行,若消去第 $i$ 行,将其余 $n-1$ 行相加,那么第 $j$ 列是 1 不是 0,这和之前假设的 $n-1$ 行是线性相关的相矛盾,这就是说 $A_e$ 的秩至少是 $n-1$,即,$R(A_e)\geq n-1$。

故 $R(A_e)=n-1$。证毕。

引理 2:$T$ 是连通$(n,m)$图 $G$ 的一棵生成树,当且仅当 $T$ 为 $G$ 的有 $n-1$ 条边的连通生成子图。

证:必要性:如果 $T$ 是一棵生成树,则 $T$ 是 $G$ 的一个生成子图,故 $T$ 有 $n$ 个顶点,又 $T$ 是一棵树,故 $T$ 连通且有 $n-1$ 条边。

充分性:如果 $T$ 为 $G$ 的有 $n-1$ 条边的连通生成子图,那么 $T$ 必有 $n$ 个顶点,又因为 $T$ 连通,所以 $T$ 是一棵树,所以 $T$ 是一棵生成树。

## 3 主要结果

为了说明关联矩阵的大子阵与树之间的关系,设 $G$ 是一个具有 $n$ 个顶点的连通图,$A$ 是 $G$ 的一个关联矩阵,由引理 1 知,$R(A)$等于它的行数,故 $A$ 至少有一个行列式不为零的大子阵 $A_m$,考虑 $G$ 的一个子图 $G_1$,它的边对应于非退化的列。因为 $A_m$ 是非退化的,故 $A_m$ 是 $G_1$ 的一个关联矩阵,因为 $A_m$ 的行数为 $m-1$,且每行对应与出参考顶点外的一个顶点,故 $G_1$ 有 $n$ 个顶点,又因为 $G_1$ 是方阵,每一列对应与一条边所以 $G_1$ 有 $n-1$ 条边,又 $G_1$ 的秩为 $n-1$,故 $G_1$ 连通,这样的一个子图称为树。在文献[2,3]中,作者给出了求关联矩阵全部生成树的方法,本文在此基础上给出图的生成树的个数以及其求法。

定理 2.1:在连通图 $G$ 的关联矩阵 $A$ 上,对应与它的大子阵的边集合是 $G$ 的一棵生成树当且仅当 $A$ 的大子阵非退化。

证:设 $A_m$ 是 $A$ 的大子阵,

必要性:如果大子阵的边集合是 $G$ 的一棵生成树,由于 $A$ 中有 $n-1$ 行,这些行代表的是 $G$ 的除去参考点外的其它顶点,同时也是树顶点,所以 $A_m$ 是树的关联矩阵。而图的秩与该图的关联矩阵的秩相等,故树的秩为 $n-1$,又因为 $A_m$ 是 $n-1$ 的方阵,故 $A_m$ 非退化。

充分性:如果 $A_m$ 是非退化的,设与 $A_m$ 相对应的边组成的子图为 $G_1$,因为 $A_m$ 有 $n-1$ 行,故 $G_1$ 有 $n$ 个顶点(包含参考点),$A_m$ 有 $n-1$ 列,所以有 $n-1$ 条边,又 $A_m$ 非退化,所以 $R(A_m)=n-1$,,所以 $G_1$ 连通,故 $G_1$ 是一棵生成树。

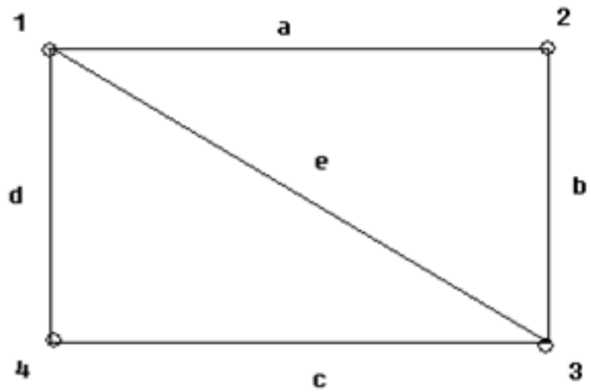
定理 2.2:图 $G$ 中的树的总数$=|AA^T|$

证:因为$|AA^T|=\sum_{i=1}^{t}|A_{mi}|\cdot|A_{mi}^T|$,其中 $t$ 表示 $A$ 中所有可能大子阵,故 $t=\binom{m}{n}$,其中 $m$ 表示边数,$n$

表示顶点数。当$|A_{mi}|=0$时不影响上式,故只考虑$A_{mi}$正则时的情形,所以有$|AA^t|=\sum|A_{mi}|\cdot|A_{mi}^T|$,又因为$A_{mi}=1$或者$-1$,故$|A_{mi}|\cdot|A_{mi}^T|=1$。$A_{mi}$的列代表树,故$|AA^T|$表示树的总数。

接下来我们给出一个找图$G$大子阵和树的例子。

例:找出图$G$的所有大子阵。




(G)

解:如图所示,以顶点 4 为参考顶点,则$G$的关联矩阵为

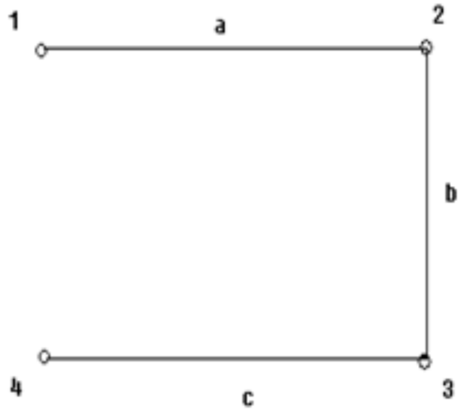
$$A=\begin{array}{c@{}c}&\begin{array}{ccccc}a&b&c&d&e\end{array}\\\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}&\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\1&1&0&0&0\\0&1&1&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

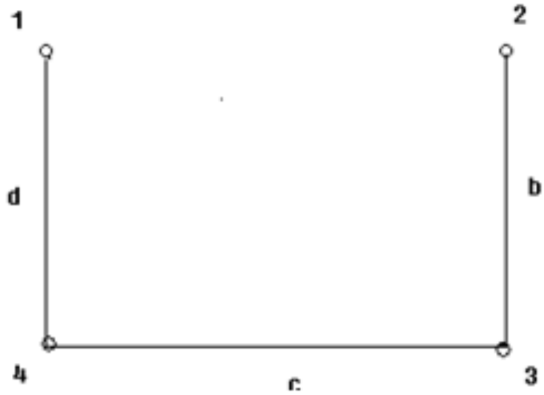
现找出$A$的退化大子阵,

$$A_1=\begin{array}{c@{}c}&\begin{array}{ccc}c&d&e\end{array}\\\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}&\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\end{array},|A_1|=0;\qquad A_2=\begin{array}{c@{}c}&\begin{array}{ccc}a&b&e\end{array}\\\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}&\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\end{array},|A_2|=0;$$

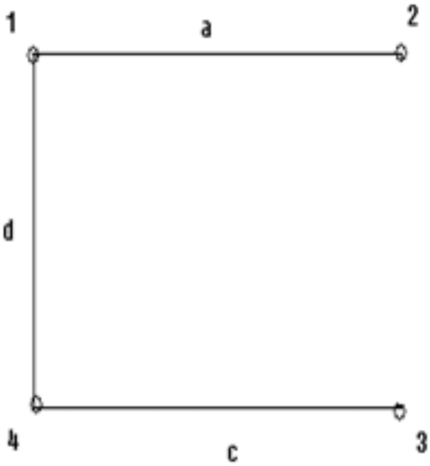
现找出非退化大子阵,

$$T_1=\begin{array}{c@{}c}&\begin{array}{ccc}a&b&c\end{array}\\\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}&\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\end{array}\qquad T_2=\begin{array}{c@{}c}&\begin{array}{ccc}b&c&d\end{array}\\\begin{array}{c}1\\2\\3\end{array}&\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$



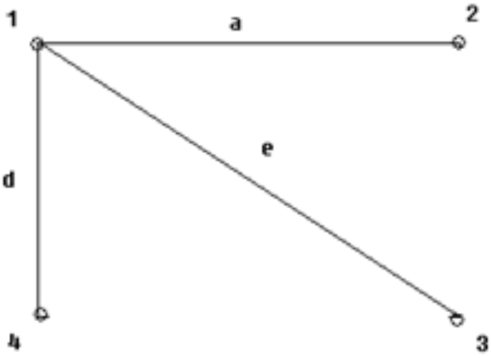



$$T_3=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

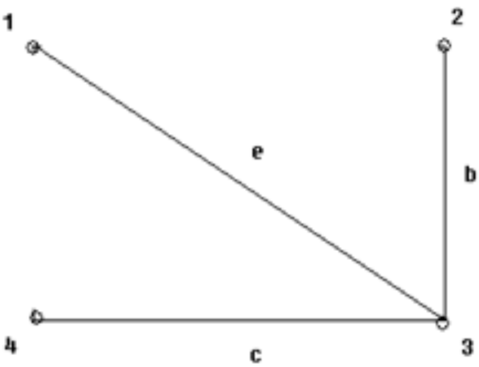



$$T_4=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & b & d \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

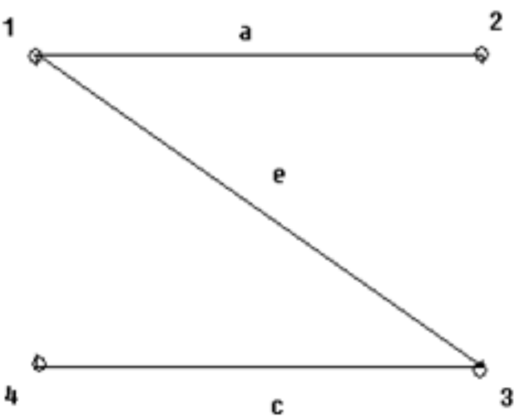

$$T_5=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



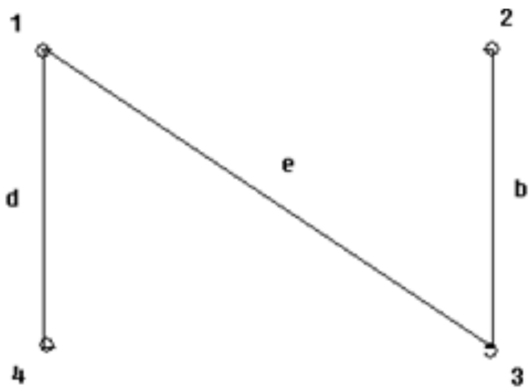

$$T_6=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b & c & e \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$




$$T_7=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} a & c & e \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$




$$T_8=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$



由于$|T_i|\neq 0$,$(i=1,2,\cdots,8)$,由图所示,大子阵$T_1,T_2,\cdots,T$所对应的边集合是一树。

## 4 结语

树是图理论中非常重要的一类图形,寻找一个图$G$的生成树在解决某些问题方面至关重要。寻找图的生成树的主要方法为广探法,但是在某些情况下,我们需要知道一个图的生成树的具体个数,而广探法在这一方面就显得无能为力了,因为利用广探法的方法寻找过程极为复杂。本文通过图的关联矩阵,利用高等代数知识,建立起了关联矩阵和树的关系,即图$G$中的树的总数$=|AA^T|$。利用这个结果,能够快速计算出树的总数,并且给出了一种新的更优的方法来寻找生成树。同时,关联矩阵和树也是图论分支化学图论和代数图论中非常重要的概念,因此具有较为重大的研究意义。

**参考文献:**

[1] 张先迪,李正良.图论及其应用[M].北京:高等教育出版社,2005:15-16.
[2] 陈明,李刚,蔡晓静,王向荣.一种关于图的关联矩阵秩的定理证明新方法[J].数学的认知与实践:2015,22(1):258-262.
[3] 李斌.简单有向连通图关联矩阵右逆的图特征及应用[J].重庆大学学报(自然科学版),2000,18(3):34-38.
[4] 徐俊明.图论及其应用[M].合肥:中国科学技术出版社,2014:91-93.
[5] 赵凯,王晓平,董大伟.基于关联矩阵主对角线谱理论的欧拉图研究[J].长春师范大学学报(自然科学版),2017,36(8):10-13.

**Relationship Between Incidence Matrix and Tree**

*MA Beibei*,*WANG Wanyu*
(School of Mathematics, Chengdu Normal University, Chengdu 611130, China)

**Abstract**: According to the parts of properties of incidence matrix of graph $G$, the relationship between incidence matrix and tree is obtained, that is, the number of trees of $G$ is equal to $|AA^T|$, in which A is the incidence matrix of graph $G$. On the other hand, we find a method to calculate the number of the tree of $G$ according to the condition that the edge set is a generating tree if and only if the submatrix is non-degeneracy.

**Keywords**: incidence matrix; submatrix; tree

(实习编辑:杨晓玲　责任校对:曲　比)